Cours du 22.03.2021 APRES-MIDI

lundi, 22 mars 2021 12:58

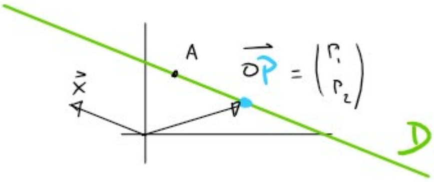
EXAMEN : a priori la date sera le 26 Avril 2021 !!

Champ : vecteurs et matrices !

Equations paramétriques d'une droite :

(ex 2 s. 14)

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vect. dir)



$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \vec{x}}$$

Tout point sur D

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre !

→ CONNU !

équ. paraml. de D

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda x_1 \\ a_2 + \lambda x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} p_1 = a_1 \cdot \lambda x_1 \\ p_2 = a_2 \cdot \lambda x_2 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} P_1 = 1 + \lambda(-3) \\ P_2 = 3 + \lambda(2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} P_1 = 1 - 3\lambda \\ P_2 = 3 + 2\lambda \end{cases}}$$

EQU. PARAM. de D.

Equation cartésienne de D

On isole le paramètre dans chaque équation des équ.

Paramétriques: $P_1 - 1 = -3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{P_1 - 1}{-3} = \frac{1 - P_1}{3}$

$$\begin{cases} P_1 = 1 - 3\lambda \\ P_2 = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1 - P_1}{3} \\ \lambda = \frac{P_2 - 3}{2} \end{cases}$$

$$\lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{P_2 - 3}{2} - \frac{1 - P_1}{3} = 0$$

$2 \qquad 3$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{11}{6} = 0}$$

Equations cartésiennes de D

$$6 \cdot [\,] = 0 \cdot 6 \qquad \boxed{2P_1 + 3P_2 - 11 = 0} \Rightarrow P_2 = -\frac{2}{3}P + \frac{11}{3}$$

$$y = ax + b$$

Il y a en fait une INFINITE d'équations cartésiennes (et aussi une infinité d'équations paramétriques) pour une même droite !

Vérifions si A est sur la droite $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{3}(1) + \frac{1}{2}(3) - \frac{11}{6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{11}{6} = \frac{2+9-11}{6} = 0 \,!$$

$\Rightarrow$ Oui c'est sur D !

$$2 \cdot (1) + 3 \cdot (3) - 11 = 2 + 9 - 11 = 0$$

$\begin{pmatrix} 0,25 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ est-il sur D ? Oui

$$2 \cdot (0,25) + 3 \cdot (3,5) - 11 = 0,5 + 10,5 - 11 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2,75 \end{pmatrix} = 2 \cdot (0,5) + 3 \cdot (2,75) - 11 = 1 + 8,25 - 11 = -1,75 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Non PAS sur D !

$$\begin{cases} P_1 = a_1 \cdot \lambda x_1 \\ P_2 = a_2 \cdot \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{P_1 - a_1}{x_1} \\ \lambda = \dfrac{P_2 - a_2}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \lambda - \lambda = 0$$

$$\frac{P_1 - a_1}{x_1} + \frac{P_2 - a_2}{x_2} = 0 \qquad (x_1 \cdot x_2)$$

$$\Rightarrow (x_1 \cdot x_2)\frac{p_1-a_1}{x_1} - (x_1 \cdot x_2)\frac{p_2-a_2}{x_2} = p_1x_2 - a_1x_2 - p_2x_1 + a_2x_1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 x_2 - p_2 x_1 - a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0}$$

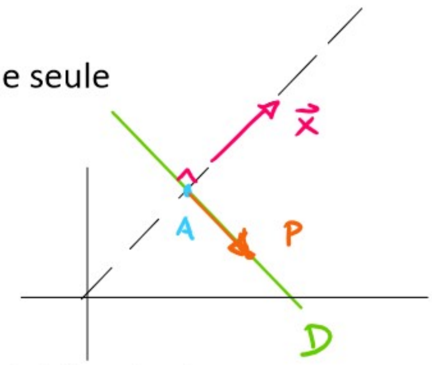
Equ. cartésienne D
parallèle à $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
passant par $\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$$2p_1 + 3p_2 \underbrace{- 11} = 0 \qquad \qquad -\overset{1}{a_1}\cdot \overset{x_2}{2} + \overset{3}{a_2}(\overset{x_1}{-3}) = \underbrace{-11}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \qquad -1\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -2-9 = \underbrace{-11}$$

Droite PARALLELE à une direction donnée !

OR, si on a une direction donnée, il n'y qu'une seule direction qui PERPENDICULAIRE !



Il n'y a qu'une seule droite passant par le point A qui est PERPENDICULAIRE à $\vec{x}$!

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$ est un vecteur directeur de D.

$\vec{AP}$ Est orthogonal à $\vec{x}$ (à angle DROIT)

$$\langle \vec{AP}, \vec{x} \rangle = 0 \ !$$

$$\Rightarrow \langle \vec{OP} - \vec{OA}, \vec{x} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (p_1 - a_1)x_1 + (p_2 - a_2)x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 x_1 + p_2 x_2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2) = 0}$$

Equation cartésienne de la droite D !

⚠ $\vec{x} \perp$ à D !

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 - a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$\perp$ à $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\vec{x}$ // à D

En 3D :

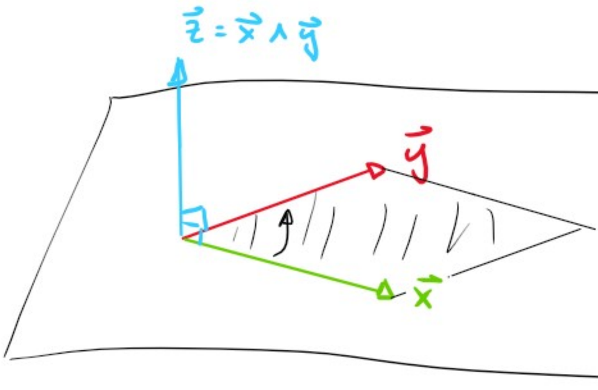
PAS DANS $\mathbb{R}^2$

$\langle \, , \, \rangle$

$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \qquad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$\boxed{\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}}$$

Produit vectoriel



$\|\vec{z}\| = $ Aire